

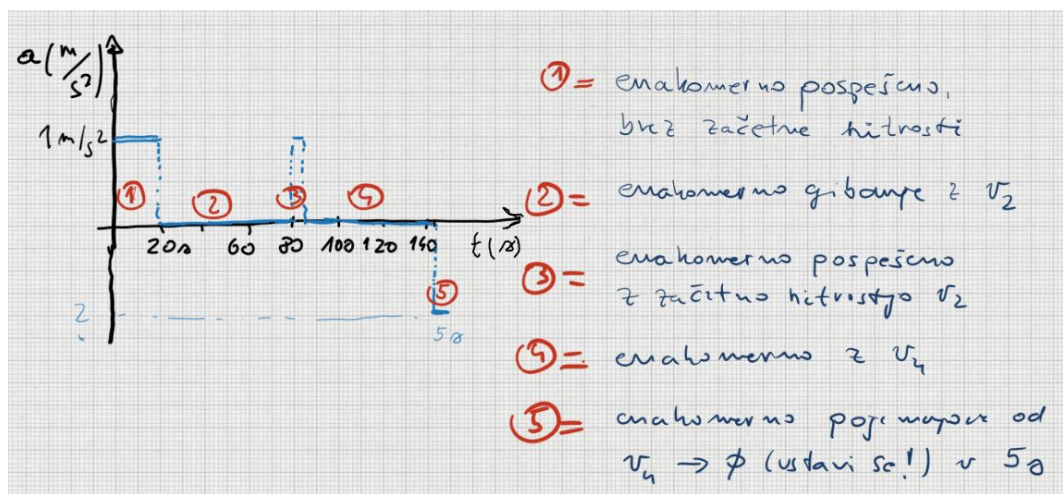
Naloge v prvem letniku študija na FMF

Če najdete kakšno računsko ali drugo napako pri rešitvah, prosim, sporočite jo na elektronski naslov

info@fizika.si

1. Kolikšno pot napravi avto, ki najprej 20 s enakomerno pospešuje z mesta s pospeškom 1 m/s^2 , se nato 1 min pelje z enakomerno hitrostjo v_2 , zatem še 5 s pospešuje s pospeškom 1 m/s^2 , se zopet 1 min pelje z enakomerno hitrostjo v_4 in na koncu do ustavitve zavira 5 s? Nariše grafe poti, hitrosti in pospeška v odvisnosti od časa!

Narišimo najprej graf (slika 1) pospeška v odvisnosti od časa in na njem označimo z 1, 2 ... 5 časovne odseke v katerih avto spreminja hitrost ali se giblje enakomerno tako kakor opisuje navodilo naloge.



Slika 1 Graf pospeška v odvisnosti od časa, ki ga narišemo na podlagi opisa gibanja v navodilih naloge. Ne poznamo še pospeška pri zaviranju, zato smo tam na navpični osi zapisali vprašaj.

Prvih 20 s (odsek 1) avto enakomerno pospešuje. V tem času hitrost linearno narašča in po 20 s avto doseže hitrost

$$v_2 = at = 1 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ s} = 20 \text{ m/s}.$$

Na grafu $v(t)$ (slika 2) narišemo za območje 1 linearno naraščanje od 0 do 20 m/s.

V tem času (torej še vedno območje 1) telo opravi pot

$$x_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{1 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \text{ s})^2}{2} = 200 \text{ m}.$$

Na grafu poti od časa $x(t)$ v tem delu narišemo del parabole. Pazimo, da je začetek parabole vodoraven, saj je začetna hitrost enaka nič. Zakaj na to pazimo? Ker je tangens naklonskega kota na grafu $x(t)$ sorazmeren trenutni hitrosti telesa.

Naslednjo minuto (med 20 s in 80 s, območje 2) se avto giblje enakomerno. Hitrost je konstantna v_2 . V tem času opravi pot

$$x_2 = v_2 t = 20 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 1200 \text{ m}.$$

Na grafu hitrosti od časa $v(t)$ je ta del vodoraven. Hitrost se namreč ne spreminja. Na grafu $x(t)$ pa narišemo linearno naraščanje od 200 m do $200 \text{ m} + 1200 \text{ m} = 1400 \text{ m}$ po 80 sekundah gibanja. Na mestu (ob času 20 s) kjer

povežemo parabolo z linearnim potekom $x(t)$ pazimo, da se naklonska kota ujameta. Saj se gibanje po prvih 20 s konča s hitrostjo $v_2 = 20 \text{ m/s}$ in potem nadaljuje z isto hitrostjo. Zato morata biti tangensa naklonskih kotov na grafu $x(t)$ enaka.

Sledi območje 3, to je 5 s enkomernega pospeševanja. Od prvih 20 s se ta del razlikuje po tem, da avto že ima hitrost v_2 . Zato:

$$v_4 = v_2 + a t = 20 \text{ m/s} + 1 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 25 \text{ m/s}$$

in

$$x_3 = v_2 t + \frac{a t^2}{2} = 20 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} + \frac{1 \text{ m/s}^2 \cdot (5 \text{ s})^2}{2} = 112,5 \text{ m}.$$

Na grafu $v(t)$ ta del narišemo kot linearno naraščanje. Naj bo enak naklonski del kakor v delu 1, saj je pospešek enak. Na grafu $x(t)$ je znova parabola, torej naraščanje s kvadratom časa. Zdaj se ta parabola ne začne vodoravno, pač pa začne z od nič različnim naklonskim kotom enakim v območju 2. Avto je do zdaj (85 s) opravil pot $x_1 + x_2 + x_3 = 1512,5 \text{ m}$

Območje 4 je znova enakomerno gibanje. Hitrost je vseh 60 s enaka $v_4 = 25 \text{ m/s}$. Pri tem opravi pot

$$x_4 = v_4 t = 25 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 1500 \text{ m}.$$

Skupno je avto v času 145 s prevozil $1512,5 \text{ m} + 1500 \text{ m} = 3012,5 \text{ m}$.

Območje 5 je zaviranje, ki traja 5 s. Naloga sicer nič ne pravi, da je zaviranje enakomerno. Predpostavimo, da je tako, sicer ne moremo izračunati pojemka.

Pri enakomernem pojemačem gibanju se hitrost spreminja kakor

$$v = v_0 - a t.$$

V našem primeru je končna hitrost enaka nič, začetna $v_0 = v_4$ in čas $t = 5 \text{ s}$. Zato

$$a = \frac{v_4}{t} = \frac{25 \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Na grafu $a(t)$ (slika 1) to narišemo kakor negativni pospešek, enak -5 m/s^2 . Torej vprašaj na sliki 1 zamenjamo z -5 m/s^2 . Morali bi ga narisati nekoliko bolj na negativni strani kakor smo to na začetku naredili napamet.

Na grafu $v(t)$ za zadnjih 5 s le povežemo hitrost v_4 z ravno črto (enakomerno pojemačo gibanje!) z vodoravno osjo.

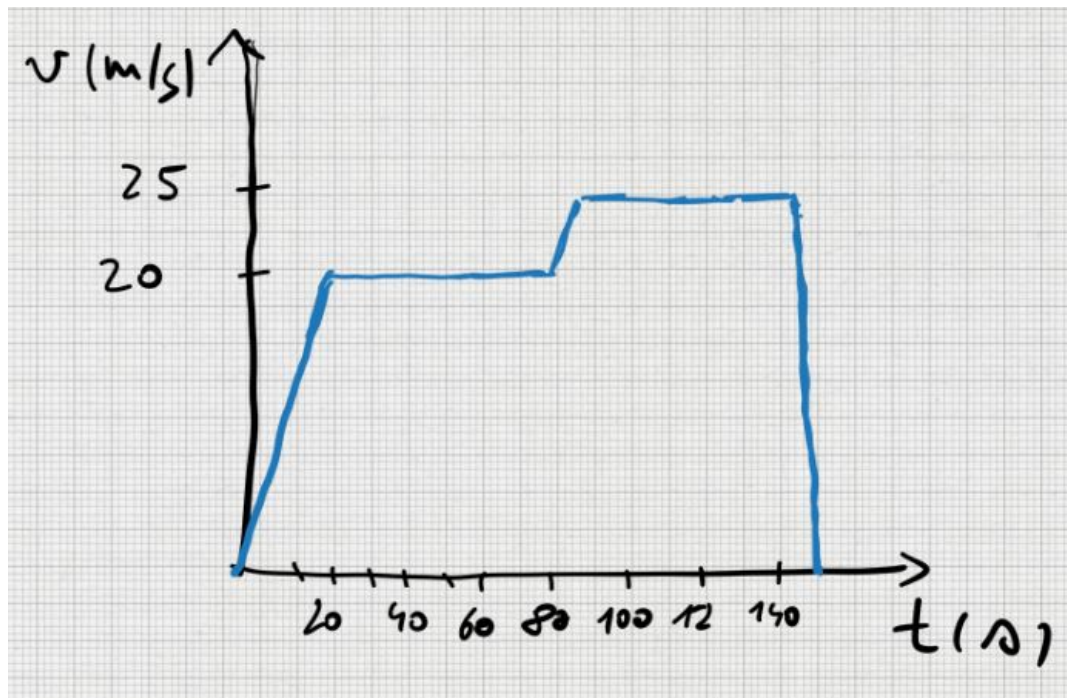
Izračunajmo še pot, ki jo avto opravi med zaviranjem. Ob začetku zaviranja ima avto začetno hitrost v_4 , zato

$$x_5 = v_4 t - \frac{a t^2}{2} = 25 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} - \frac{5 \text{ m/s}^2 \cdot (5 \text{ s})^2}{2} = 62,5 \text{ m}.$$

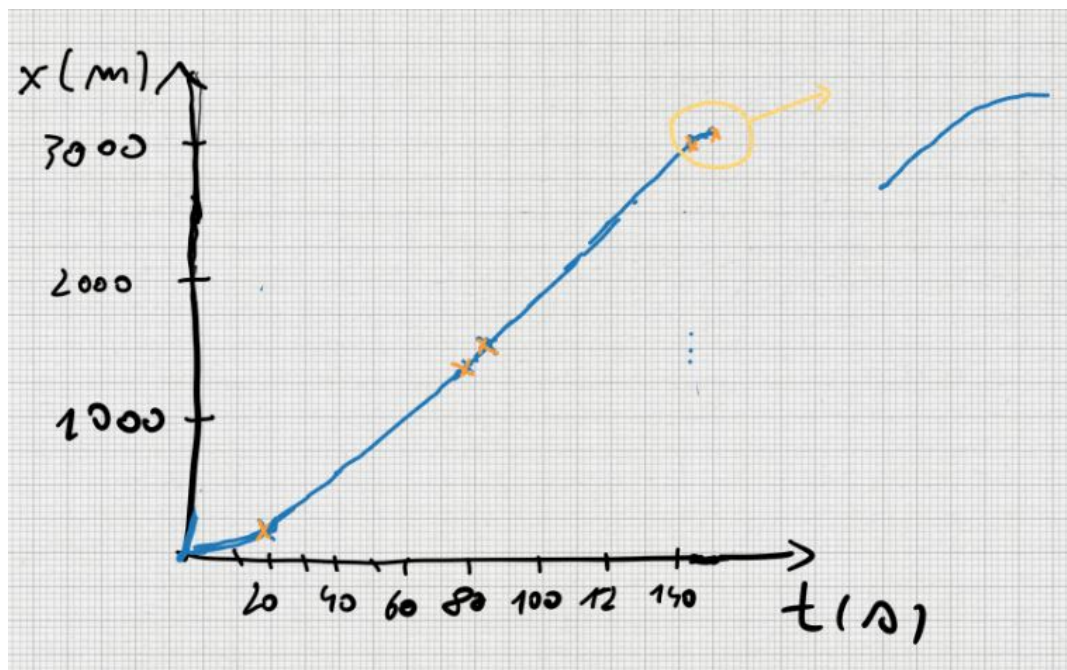
Celotna pot, ki jo opravi avto, je torej

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3012,5 \text{ m} + 62,5 \text{ m} = 3075 \text{ m}.$$

Zadnji del (območje 5, zadnjih 5 s) na grafu $x(t)$ narišemo kakor prevrnjeno parabolo. Na začetku je njen naklon enak kakor je bil naklon premice v območju 4, na koncu pa moramo zaključiti vodoravno, saj je hitrost (torej tudi naklonski kot na grafu $x(t)$) enaka nič.



Slika 1 Graf hitrosti v odvisnosti od časa



Slika 1 Graf poti v odvisnosti od časa. Najprej narišemo točke označene z oranžnimi križci. Označujejo opravljeno pot po zaključku posameznega območja. Potem točke povežemo z ravnimi črtami, ko je gibanje enakomerno, ali s parabolami, ko je gibanje enakomerno pospešeno ali pojemajoče.

2. Pri speljevanju s stranske na glavno cesto pospešujemo z mesta z enakomernim pospeškom 3 m/s^2 . Najmanj kako daleč za nami je moral ob trenutku našega speljevanja biti avtomobil, ki vozi po glavni cesti v isti smeri s hitrostjo 50 km/h , če ne želimo, da nas dohiti?

Kljub temu, da piše o speljevanju s stranske ulice, je v tem primeru mišljeno, da se tudi avto, ki pospešuje (odslej ga bomo imenovali pospešeni avto) ves čas giblje po glavni ulici. Gibanje obeh avtov poenostimo kakor gibanje v eni dimenziji, npr. v smeri osi x . Izhodišče postavimo na mesto kjer pospešeni avto začne gibanje.

Koordinato pospešenega x_1 avta opišemo z funkcijo

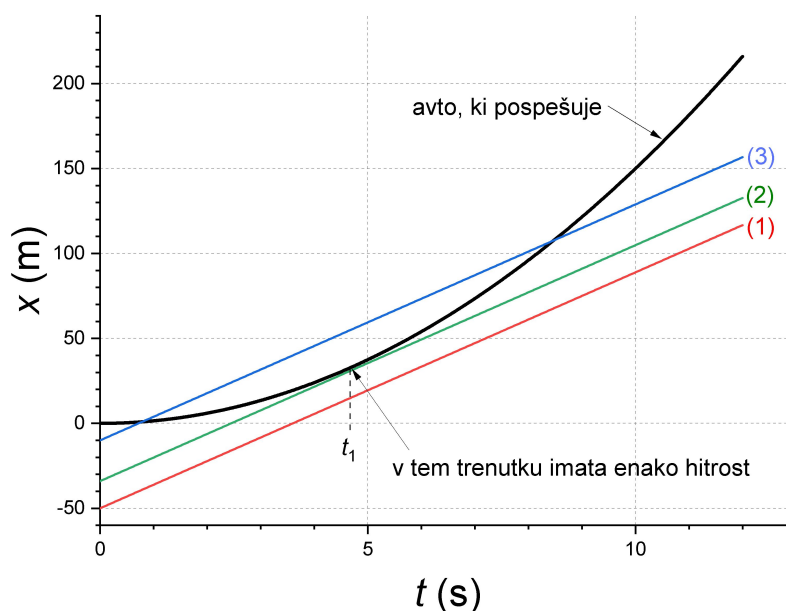
$$x_1 = \frac{a t^2}{2},$$

kjer je pospešek $a = 3 \text{ m/s}^2$.

Drugi avto, njegovo lego opišemo z $x_2(t)$ je ob začetnem času $t = 0$ na razdalji x_0 zadaj. Giblje se enakomerno (odslej enakomerni avto), zato

$$x_2 = -x_0 + v t,$$

kjer je hitrost $v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$. Narišimo x_1 in x_2 v odvisnosti od časa!



Slika 4 Graf lege pospešenega avta in enakomernega avta (premise) za tri različne razdalje x_0 (50 m, 33 m in 10 m)

Lega pospešenega avta ($x_1(t)$, črna črta na sliki 4), je popolnoma določena.

Lega enakomernega avta, ki štarta neznano kje zadaj, pa ni. V funkciji $x_2(t) = -x_0 + v t$ ne poznamo x_0 , to je razdaljo med avtoma ob času $t = 0$. Na sliki 4 smo narisali tri primere. Za vse primere je nakon (hitrost v) enak.

Pri rdečem primeru (1) smo za x_0 vzeli 50 m. Vidimo, da enakomerni avto nikoli ne dohiti tistega, ki pospešuje. Očitno je minimalna razdalja, da enakomerni avto ne dohiti pospešenega manjša od 50 m.

Ko razdaljo x_0 zmajšamo na npr. 10 m (modra črta, (3)), opazimo, da enakomerni avto že po 1 sekundi dohiti pospešenega (sekata se modra in črna krivulja). Šele po okoli 8,5 s pospešeni avto dohiti enakomernega in ga od takrat naprej pusti za sabo. Razdalja $x_0 = 10 \text{ m}$ je očitno premajhna.

Mejni primer bo tisti, ko bo razdalja x_0 takšna, da enakomerni avto ravno dohiti pospešenega. Trenutek za tem pa spet zaostane za njim, saj pospešenemu hitrost narašča. Približno tak primer kaže zelena črta na sliki 4. Vidimo, da morata imeti avta v trenutku, ko enakomerni avto ravno dohiti pospešenega (čas t_1 na sliki 4) ravno enaki hitrosti. Razdaljo x_0 bomo torej določili tako, da najprej na podlagi sklepanja, da imata v trenutku t_1 , ko sta avta skupaj, enako hitrost, izračunamo t_1 :

$$a t_1 = v.$$

$$\text{Sledi } t_1 = \frac{v}{a} = \frac{13,9 \text{ m/s}}{3 \text{ m/s}^2} = 4,63 \text{ s}.$$

Ob času t_1 sta avta skupaj, zato izenačimo $x_1 = x_2$, torej

$$\frac{a t_1^2}{2} = -x_0 + v t_1$$

Nazadnje izrazimo

$$x_0 = v t_1 - \frac{a t_1^2}{2} = 13,9 \text{ m/s} \cdot 4,63 \text{ s} - \frac{3 \text{ m/s}^2 \cdot (4,63 \text{ s})^2}{2} = 32,2 \text{ m}.$$

Odgovor: Enakomerni avto mora biti v trenutku speljevanja pospešenega avta več kakor 32,2 m za pospešenim avtom, če ne želimo, da ga dohiti.

3. Iz tretjega nadstropja z višine $h_1 = 9\text{ m}$ prvi deček spusti prvi kamen navpično navzdol. Istočasno drugi deček vrže drugi kamen iz devetega nadstropja višine $h_2 = 27\text{ m}$ navpično navzdol. S kolikšno začetno hitrostjo mora vreči kamen drugi deček, da bosta kamna padla istočasno na tla? Koliko prej bi moral drugi deček spustiti kamen brez začetne hitrosti proti tlom, da bosta oba kamna hkrati udarila ob tla?

Naloga je zelo preprosta. V prvem primeru morata oba kamna za padec porabiti enak čas. Prvi kamen spustimo, torej je njegova začetna hitrost enaka 0. Čas padanja lahko izračunamo iz

$$h_1 = \frac{g t^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2 h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9\text{ m}}{9,81\text{ m/s}^2}} = 1,35\text{ s}.$$

V istem času mora pot do tal opraviti tudi drugi kamen. Ta je sicer višje in ima zato daljšo pot, a zato ima začetno hitrost v_0 . Zanj zapišemo

$$h_2 = v_0 t + \frac{g t^2}{2}$$

in izračunamo

$$v_0 = \frac{h_2}{t} - \frac{g t}{2} = \frac{27\text{ m}}{1,35\text{ s}} - \frac{9,81\text{ m/s}^2 \cdot 1,35\text{ s}}{2} = 13,3\text{ m/s}.$$

Odgovor na prvo vprašanje je torej: Deček mora vreči drugi kamen z začetno hitrostjo $13,3\text{ m/s}$ da bosta kamna padla istočasno na tla.

Koliko prej bi moral drugi deček spustiti (torej nič začetne hitrosti!) kamen, da bi kamna hkrati udarila ob tla? Odgovor: toliko prej koliko več časa rabi drugi kamen za pot do tal!

Drugi kamen porabi ($h_2 = \frac{g t_2^2}{2}$) čas

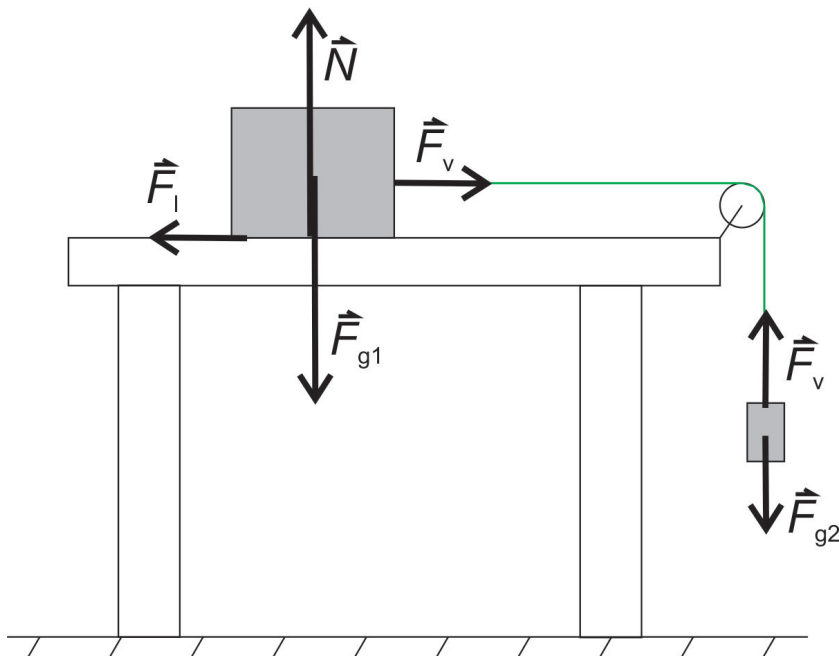
$$t_2 = \sqrt{\frac{2 h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 27\text{ m}}{9,81\text{ m/s}^2}} = 2,35\text{ s},$$

da pade na tla. Torej mora drugi deček spustiti kamen $2,35\text{ s} - 1,35\text{ s} = 1,0\text{ s}$ pred prvim dečkom.

4. Prva klada stoji na vodoravni podlagi in ima težo $F_{g1} = 50 \text{ N}$, druga klada pa ima težo $F_{g2} = 20 \text{ N}$ in prosto visi, ter je prek škripca povezana s prvo klado. Obe mirujeta. S kolikšno silo je napeta vrv, ki povezuje obe kladi? Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med prvo klado in podlago?

Narišimo kladi in sile na kladi. Pri risanju sil (smer in dolžina) že imejmo v mislih 1. Newtonov zakon: Če je vsota sil in navorov na telo enaka nič, telo miruje ali se giblje premo enakomerno.

V opisanem primeru kladi mirujeta, zato imejmo v mislih, da mora biti vsota sil na vsako enaka nič.



Slika 5 Kladi in sile na kladi

Risanje sil začnimo na viseči kladi. Navpično navzdol deluje sila teže F_{g2} . Edina druga sila na visečo klado je sila v vrvici. Očitno mora biti nasprotno enaka teži F_{g2} . Imamo torej že prvi odgovor:

Vrvica je napeta s silo 20 N .

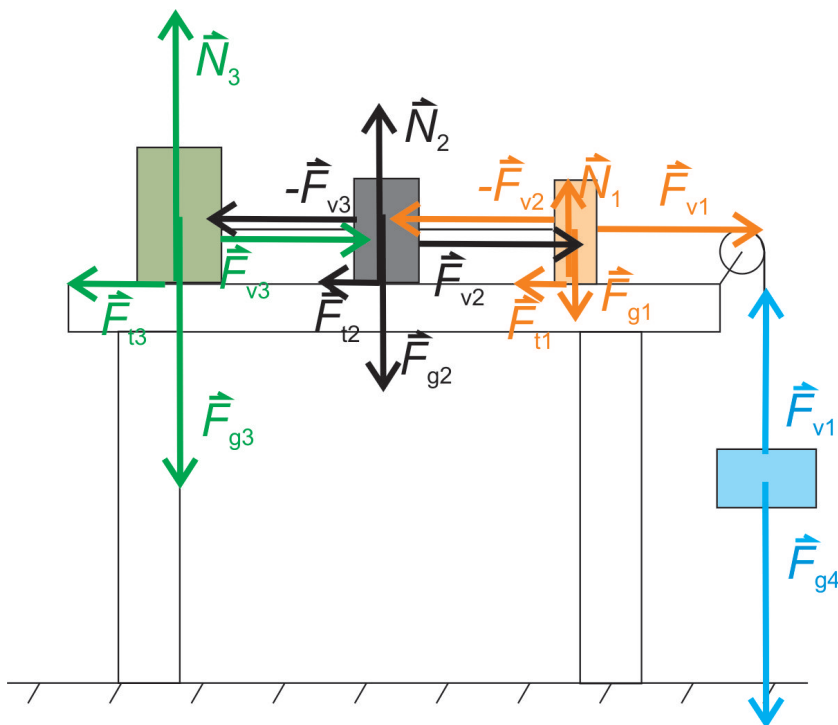
Z enako veliko silo 20 N vrvica vleče klado na mizi proti škripcu. Ker tudi ta klada miruje, mora biti sila lepenja enaka $F_l = 20 \text{ N}$.

Pri sili lepenja ne pozabimo, da je lahko največ $F_{lmax} = k_l N$. V našem primeru je $N = 50 \text{ N}$ zaradi ravnesja sil na prvo klado. Najmanjši možni koeficient lepenja med klado na mizi in mizo bo v primeru, da je sila lepenja 20 N , ki je potrebna, da drži visečo klado pri miru, že kar maksimalna sila lepenja $F_{lmax} = 20 \text{ N}$. Zato je najmanjši koeficient lepenja enak

$$k_l = \frac{F_{lmax}}{N} = \frac{20 \text{ N}}{50 \text{ N}} = 0,4.$$

5. Na vodoravni mizi ležijo tri klade z masami $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ in $m_3 = 4 \text{ kg}$. Klade so povezane med seboj z lahko vrvico, pri čemer je klada z maso 1 kg najbližje robu mize. To klado povežemo z lahko vrvico z utežjo mase $m_4 = 10 \text{ kg}$, ki preko lahkega škripca visi preko roba mize. S kolikšnim pospeškom se spušča utež? Koeficient trenja med kladami in mizo je $0,5$. Izračunaj še sile v vrvicah!

Na sliki 6 smo narisali vse štiri klade in sile na klado. Barva klade se ujema z barvami sil na isto klado. V tem primeru se klade pospešeno premikajo. Predpostavimo, da je vrvica neraztegljiva. Potem imajo vse štiri klade enak pospešek. Za vsako klado zapišimo 2. Newtonov zakon.



Slika 6 Uteži in sile na uteži.

Začnimo z visečo utežjo. Nanjo delujeta le dve sili, zato:

$$F_{g4} - F_{v1} = m_4 a, \quad (1)$$

kjer je $F_{g4} = g m_4 = 98,1 \text{ N}$. V enačbi (1) ne poznamo sile v vrvici F_{v1} in pospeška a . Dveh neznank ne moremo izračunati iz ene enačbe, zato nadaljujemo s pisanjem enačb (2. Newtonovega zakona) za ostale uteži.

Utež z maso m_1 (oranžna in oranžne sile) se giblje s pospeškom a v desno. V vodoravni smeri zanjo 2. Newtonov zakon zapišemo kot:

$$F_{v1} - F_{v2} - F_{t1} = m_1 a, \quad (2)$$

kjer je F_{v1} ista sila v vrvici, ki zadržuje visečo utež, da prosto ne pada. Sila F_{v2} ni enaka sili F_{v1} , sila $F_{t1} = k_t N_1 = k_t F_{g1} = 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 4,91 \text{ N}$. Pridobili smo novo enačbo (2), a še eno neznanko, to je silo v vrvici F_{v2} . Sistem enačb (1) in (2) zato še vedno ni rešljiv.

Zapišimo 2. Newtonov zakon za naslednjo utež - črno, z maso m_2 :

$$F_{v2} - F_{v3} - F_{t2} = m_2 a, \quad (3)$$

kjer je F_{v2} ista sila v vrvci, ki zadržuje oranžno utež. Sila F_{v3} vleče črno utež v levo, sila $F_{t2} = k_t N_2 = k_t F_{g2} = 0,5 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ N}$. Pridobili smo novo enačbo (3), a še eno neznanko, to je silo v vrvici F_{v3} . Sistem enačb (1), (2) in (3) zato še vedno ni rešljiv.

Končno zapišimo 2. Newtonov zakon še za zeleno utež z maso m_3 :

$$F_{v3} - F_{t3} = m_3 a, \quad (4)$$

kjer je F_{v3} ista sila v vrvci, ki zadržuje črno utež. Sila trena $F_{t3} = k_t N_3 = k_t F_{g3} = 0,5 \cdot 4 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 19,62 \text{ N}$. Pridobili smo novo enačbo (4), in nobene nove neznanke. Zdaj je sistem enačb (1), (2), (3) in (4) rešljiv.

Zdi se, da je najhitrejša pot do pospeša a , da iz enačbe (1) izrazimo silo vrvce F_{v1} . Izraz $F_{v1} = F_{g4} - m_4 a$ nesemo v enačbo (2) in iz nje izrazimo

$$F_{v2} = F_{g4} - F_{t1} - (m_1 + m_4) a.$$

Zgornji izraz za silo F_{v2} nesemo v enačbo (3) in iz nje izrazimo silo

$$F_{v3} = F_{g4} - F_{t1} - F_{t2} - (m_1 + m_2 + m_4) a.$$

Nazasnje zgornji izraz za silo F_{v3} vstavimo v enačbo (4) in izrazimo pospešek a

$$a = \frac{F_{g4} - F_{t1} - F_{t2} - F_{t3}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{98,1 \text{ N} - 4,91 \text{ N} - 9,81 \text{ N} - 19,62 \text{ N}}{1 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} = 3,75 \text{ m/s}^2.$$

Zdaj lahko izračunamo še sile v vrvicah:

$$F_{v3} = 98,1 \text{ N} - 4,91 \text{ N} - 9,81 \text{ N} - (1 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 10 \text{ kg}) \cdot 3,75 \text{ m/s}^2 = 34,62 \text{ N},$$

$$F_{v2} = 98,1 \text{ N} - 4,91 \text{ N} - (1 \text{ kg} + 10 \text{ kg}) \cdot 3,75 \text{ m/s}^2 = 51,94 \text{ N}$$

in

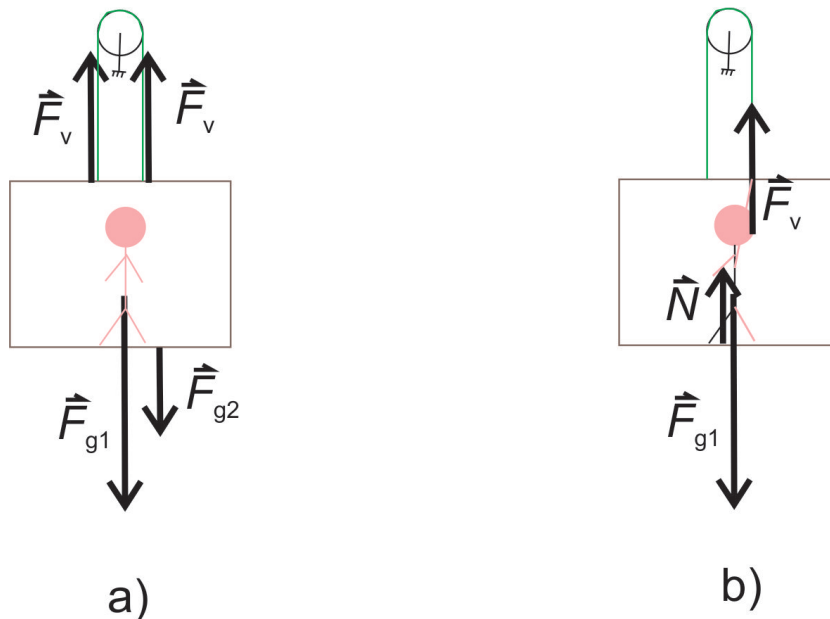
$$F_{v1} = 98,1 \text{ N} - 10 \text{ kg} \cdot 3,75 \text{ m/s}^2 = 60,60 \text{ N}.$$

6. Čistilec oken sedi na odru, obešenem preko lahkega škripca. Ko se želi premakniti v višje nadstropje, vleče za prosti konec vrvi tako močno, da pritiska na oder s silo $N = 500\text{ N}$. S kolikšnim pospeškom se dviga oder? Masa praznega odra je 30 kg , moža pa 90 kg .

Premislimo najprej o preprostejšem zgledu. Naj dvigalo s čistilcem miruje privezano preko škripca kakor je narisano na sliki 7 a).

Sila v vrvici je ena sama, torej enaka na obeh koncih, kjer je vrvica privezana na dvigalo. Sila v vrvici je očitno polovica vsote teže čistilca in odra, torej (zakroženo, če bi vzeli težni pospešek $g = 10\text{ m/s}^2$) 600 N .

Čistilec miruje v dvigalu. Vsota sil nanj mora biti nič. Tla delujejo nanj s silo, ki je nasprotno enaka teži čistilca, to je 900 N . Z nasprotno enako silo torej čistilec pritiska na oder.



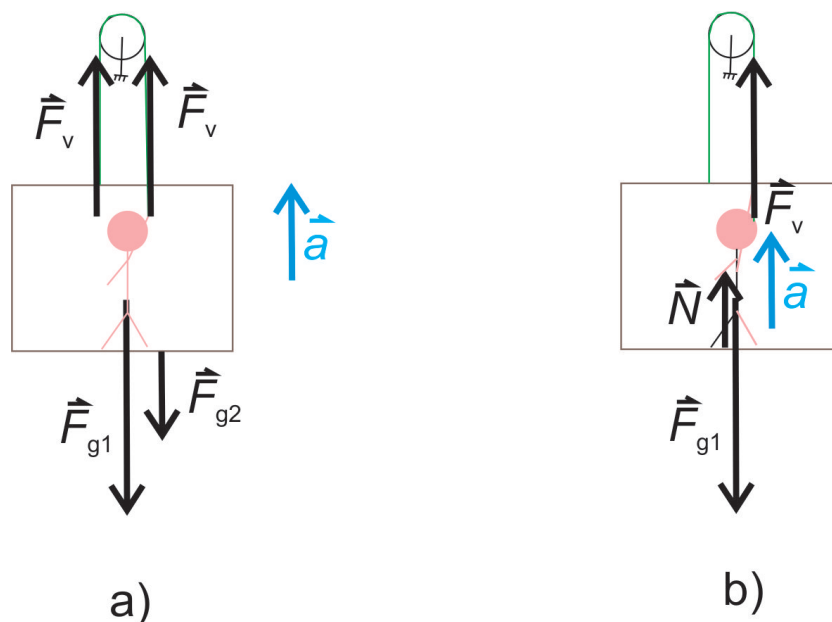
Slika 7 Čistilec in dvigalo mirujeta. V primeru a) je vrvica privezana za oder. Narisane so sile na „sistem“, ki ga sestavljata oder in čistilec. V primeru b) čistilec drži en konec vrvi. Narisane so sile na čistilca.

Premislimo, kaj se spremeni s silami na čistilca, če čistilec drži en konec vrvi z roko, namesto, da je vrv privezana za oder (slika 7b). Še vedno obravnavamo primer, ko čistilec in oder mirujeta.

Sila v vrvici je še vedno 600 N . Enako kakor prej, saj je „od daleč“ gledano (s tem mislimo, da za obravnavani sistem izberemo čistilca in oder skupaj) popolnoma vseeno ali je vrvica privezana za oder ali jo drži čistilec.

Sile na čistilca se pa spremenijo. Obravnavani sistem zdaj omejimo na čistilca. Zunanje sile na čistilca so narisane na sliki 7b. Čistilec miruje, vsota sil nanj mora biti enaka nič. Teža (900 N) ga vleče navzdol, vrvica (600 N) navzgor. Razliko (sila $\vec{N}$ na sliki 7b, ki znaša 300 N) prispeva oder. Z nasprotno enako silo čistilec pritiska na oder. Če bi čistilec stal na tehtnici, bi ta v primeru, ko se drži za vrv, pokazala le 30 kg .

Kaj se spremeni, ko se čistilec začne vzpenjati po vrvi? Sila v vrvici se poveča. Na sliki 8 so narisane sile v tem primeru. Na sliki 8a so zunanje sile na sistem, ki ga sestavljata čistilec in oder skupaj, na sliki 8b pa zunanje sile na čistilca, ko njega samostojno obravnavamo kot opazovalni sistem.



Slika 8 a) Zunanje sile na sistem čistilec + oder, ko se pospešeno dvigata. b) Zunanje sile na čistilca za primer istega gibanja, kakor na sliki a). Sila podlage na čistilca je v primeru a) notranja sila, zdaj postane zunanja.

Zapišimo 2. Newtonov zakon za sistem čistilec + oder:

$$2 F_v - F_{g1} - F_{g2} = (m_1 + m_2) a.$$

V zgornji enačbi ne poznamo pospeška a in sile v vrvi F_v . Potrebujemo še eno enačbo. To dobimo, če za obravnavani sistem izberemo na primer le čistilca.

Na čistilca delujeta sila vrvice in podlage $\vec{N}$ navzgor, teža čistilca pa navzdol. Velikost sile podlage N je enaka velikosti sile s katero pritiska čistilec na oder, torej $N = 500 \text{ N}$. Čistilec se dviga s pospeškom a , zato

$$F_v + N - F_{g1} = m_1 a.$$

Pridobili smo drugo enačbo, ki povezuje neznano silo v vrvi F_v in pospešek a . Izrazimo jo npr. iz druge enačbe, vstavimo v prvo ter dobimo

$$a = \frac{F_{g2} + 2 N - F_{g1}}{m_1 - m_2} = \frac{300 \text{ N} + 2 \cdot 500 \text{ N} - 900 \text{ N}}{90 \text{ kg} - 30 \text{ kg}} = 6,7 \text{ m/s}^2.$$

Težni pospešek smo zaokrožili na 10 m/s^2 .

7. Na navpično navzdol visečo vijačno vzmet obesimo utež z maso $m = 0,5 \text{ kg}$. Ko jo izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo, zaniha z nihajnim časom $t_{01} = 1 \text{ s}$. Kolikšno utež moramo dodati k prvi, da bo nihajni čas nihala $t_{02} = 2 \text{ s}$?

Nihajni čas nihala na vijačno vzmet izračunamo iz enačbe:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Iz znanega nihajnega časa t_{01} pri obešeni masi m lahko izrazimo in izračunamo koeficient vzmeti

$$k = \frac{4\pi^2 m}{t_{01}^2} = 19,7 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Ko prvi masi dodamo maso m_d , se nihajni čas poveča:

$$t_{02} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_d}{k}}.$$

Iz zadnje enačbe lahko izrazimo

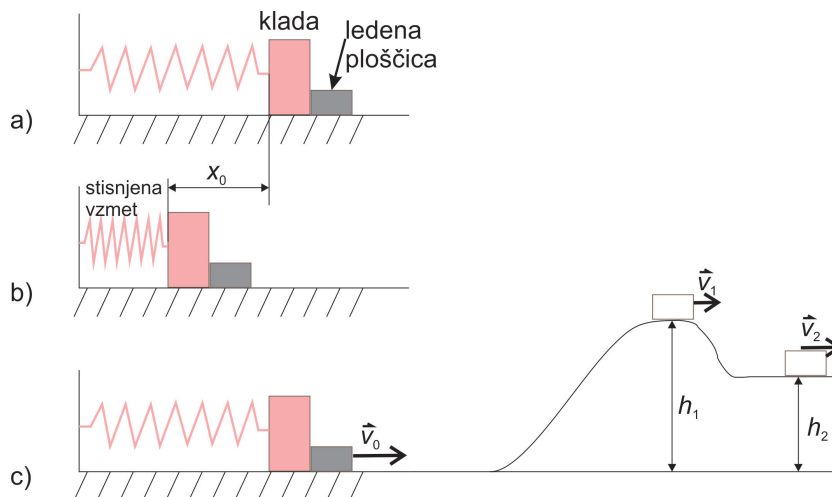
$$m_d = k \frac{t_{02}^2}{4\pi^2} - m = 1,5 \text{ kg}.$$

Lahko ša vanjo vstavimo izraz za koeficient vzmeti, ki smo ga izpeljali za primer z maso m : $k = \frac{4\pi^2 m}{t_{01}^2}$ in dobimo:

$$m_d = \left(\left(\frac{t_{02}}{t_{01}}\right)^2 - 1\right) m = \left(\left(\frac{2 \text{ s}}{1 \text{ s}}\right)^2 - 1\right) 0,5 \text{ kg} = 1,5 \text{ kg}.$$

8. Vzmet s koeficientom vzmeti $k = 10^4 \text{ N/m}$ je povezana s klado z maso $m_k = 0,9 \text{ kg}$. Na klado prislonimo ledeno ploščico z maso $m_l = 0,1 \text{ kg}$. Vzmet skrčimo za $x_0 = 5 \text{ cm}$ in spustimo. Kolikšna je začetna hitrost ledene ploščice? Ledena ploščica nadaljuje pot po gladki podlagi proti gladki grbini. Kolikšna je hitrost ploščice na vrhu grbine in kolikšna na platoju na drugi strani grbine, če je grbina visoka $h_1 = 1 \text{ m}$ in je plato $h_2 = 0,6 \text{ m}$ nad začetno lego ploščice? Največ koliko sme biti grbina visoka, da bo ploščica še lahko zdrsnila na drugo stran? Za težnostni pospešek vzemi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, trenje zanemari.

Premislimo najprej o tem, kaj se zgodi dokler je ledena ploščica ob kladi, brez pisanja enačb. Poglejmo sliko 9. Vzmet stisnemo za x_0 in jo spustimo. Klada in ploščica se zaradi sile vzmeti začneta gibati pospešeno. Sila vzmeti se med tem gibanjem spreminja, zato tudi pospešek klade in ploščice ni konstanten. Ni preprosto iz 2. Newtonovega zakona izračunati kako narašča hitrost klade in ploščice. Veliko lažje bo s premislekom o energiji. Še pred tem pa premislimo, kdaj se ploščica odlepi od klade. Ko se klada in ploščica vrneva v ravnovesno lego (neraztegnjena vzmet, slika 9c), imata hitrost v_0 . Trenutek potem se vzmet že razteguje, zato začne zavirati klado. Ledena ploščica je le prislonjena ob klado, zato se je ne drži, ko klada začne zaostajati. Pomeni, da bo ledena ploščica proti klancu na sliki 9c potovala s hitrostjo v_0 , ki jo doseže v ravnovesni legi.



Slika 9 a) Neraztegnjena vzmet. b) Vzmet stisnjena za x_0 . c) Vzmet je znova neraztegnjena, takrat imata klada in ledena ploščica največjo hitrost v_0 .

Izračunajmo hitrost v_0 ! Med stiskanjem vzmeti povečamo prožnostno energijo sistema (sistem = vzmet, klada in ledena ploščica) za $W_{pr} = \frac{k x_0^2}{2}$. Potem, ko vzmet spustimo, se ta prožnostna energija pretvarja v kinetično. Ker ni zaviralnih sil (zanemarimo trenje, zračni upor), je v ravnovesni legi, ko je vzmet neraztegnjena, vsa prožnostna energija spremenjena v kinetično. Mislimo si, da je vzmet lahka (zato nič ne prispeva h celotni kinetični energiji), torej je $W_{k0} = \frac{(m_k + m_l) v_0^2}{2}$. Izenačimo največjo prožnostno energijo in kinetično v ravnovesni legi ter izračunamo začetno hitrost lepene ploščice

$$v_0 = \sqrt{\frac{k x_0^2}{m_d + m_l}} = 5 \text{ m/s}.$$

Ker trenje med celotnim gibanjem zanemarimo, pomeni da ledena ploščica pride do vznožja klanca s hitrostjo $v_0 = 5 \text{ m/s}$ in ima kinetično energijo $W_{k0} = \frac{m_l v_0^2}{2} = 1,25 \text{ J}$. Del te energije se pri drsenju ploščice proti vrhu grbine pretvarja v potencialno energijo. Ker ni zaviralnih sil (razen teže pri gibanju navzgor, kar upoštevamo kakr spremembo potencialne energije), je začetna kinetična energija pred grbino enaka vsoti spremembe potencialne energije in preostanka kinetične energije. Označimo hitrost ploščice na vrhu grbine z v_1 . Potem lahko zapišemo

$$W_{k0} = m_l g h_1 + W_{k1}$$

in

$$\frac{m_l v_0^2}{2} = m_l g h_1 + \frac{m_l v_1^2}{2}.$$

Izrazimo in izračunamo:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2 g h_1} = 2,32 \text{ m/s}.$$

Čez grbino se ploščica spušča proti platoju. Zdaj se nekaj potencialne energije spreminja nazaj v kinetično. Tudi v tem delu ni zaviranja zaradi trenja ali zračnega upora, zato smemo podobno kakor na vrhu grbine tudi na platoju izenačiti začetno kinetično energijo W_{k0} in vsoto spremembe potencialne energije $m_l g h_2$ in kinetične energije W_{k2} :

$$W_{k0} = m_l g h_2 + W_{k2}$$

in

$$\frac{m_l v_0^2}{2} = m_l g h_2 + \frac{m_l v_2^2}{2}.$$

Izrazimo in izračunamo:

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2 g h_1} = 3,64 \text{ m/s}.$$

Odgovorimo še na zadnje vprašanje o najvišji grbini, da ploščica še zdrsne na drugo stran. Mejna višina grbine je takrat, ko bi na vrhu ploščica izgubila vso kinetično energijo, imela torej hitrost enako nič. Vsa začetna kinetična kinetična energija $W_{k0} = \frac{m_l v_0^2}{2}$ se v tem primeru spremeni v potencialno energijo $m_l g h_{max}$:

$$\frac{m_l v_0^2}{2} = m_l g h_{max}.$$

Izrazimo in izračunamo:

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(5 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 1,27 \text{ m}.$$

9. **Avto z maso $m = 900 \text{ kg}$ vozi s hitrostjo $v_0 = 80 \text{ km/h} = 22,22 \text{ m/s}$. Kolikšno silo F morajo povzročati zavore, če naj se avto ustavi na razdalji $x_{ust} = 50 \text{ m}$?**

Iz začetne hitrosti v_0 in poti ustavljanja x_{ust} lahko izračunamo pojemek, ki ga mora avto imeti pri zaviranju. Prav pride enačba, ki opisuje trenutno hitrost telesa v v odvisnosti od prevožene razdalje pri enakomerno pojemajočem gibanju:

$$v^2 = v_0^2 - 2 x a,$$

kjer je v_0 začetna hitrost. Ko se telo ustavi je njegova hitrost $v = 0$, in izrazimo

$$a = \frac{v_0^2}{2 x_{ust}} = \frac{(22,22 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 50 \text{ m}} = 4,94 \text{ m/s}^2.$$

Pojemek a avtomobilu zagotavlja zaviralna sila f , ki znaša (II. Newtonov zakon):

$$F = m a = 900 \text{ kg} \cdot 4,94 \text{ m/s}^2 = 4,44 \text{ kN}.$$

10. Motor dvigala dviga kabino dvigala s stalno hitrostjo $v = 4 \text{ m/s}$ navpično navzgor. S kolikšno močjo P dela motor, če je masa kabine dvigala $m = 450 \text{ kg}$? Koliko dela opravi A , ko dvigne breme za $h = 20 \text{ m}$?

Moč sile, v tem primeru motorja, ki vleče dvigalo navzgor, je $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$. Skalarni produkt smo v tem primeru zamenjali z navadnim, saj sila motorja in hitrost dvigala kažeta v isto smer - navzgor. Dvigalo se dviga enakomerno, zato je vsota sil nanj enaka nič. Navzdol ga vleče teža $F_g = mg = 450 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s} = 4415 \text{ N}$. Nasprotno enaka je sila motorja F . Moč motorja je potem

$$P = Fv = 4415 \text{ N} \cdot 4 \text{ m/s} = 17,7 \text{ kW}.$$

Poleg teže dvigala je sila motorja edina sila, ki deluje na dvigalo. Zato je delo sile motorja enako spremembi potencialne energije dvigala:

$$A_{sile F} = mgh = 88,3 \text{ kJ}.$$

Delo motorja bi lahko izračunali tudi preko moči motorja:

$$A = Pt,$$

kjer je čas t čas v katerem se dvigalo dvigne za 20 m , to je 5 s .

11. Na mizo v enakomernih razmiki namestimo štiri vozičke. Prvi trije imajo maso $m_1 = 2 \text{ kg}$, zadnji pa maso $m_4 = 3 \text{ kg}$. Prvi voziček s hitrostjo $v_1 = 5 \text{ m/s}$ porinemo proti drugemu vozičku. S kolikšno hitrostjo se bo čez nekaj časa gibal zadnji voziček, če:

a) se vozički ob trkih zlepijo?

b) vozički prožno trkajo?

Če se vozički med trki zlepijo, pomeni, da so trki neprožni. Kinetična energija se NE ohranja. Še vedno se pa pri posameznem trku ohranja skupna gibalna količina. To tudi pomeni, da je končna gibalna količina enaka začetni.

Začetna je $G_1 = v_1 m_1$ (s hitrostjo v_1 se giblje le prvi voziček).

Končna gibalna količina je $G_2 = (3m_1 + m_4)v$, kjer je hitrost v končna hitrost ne le zadnjega vozička, pač pa vseh skupaj, saj so sprijeti.

Iz $G_1 = G_2$ sledi

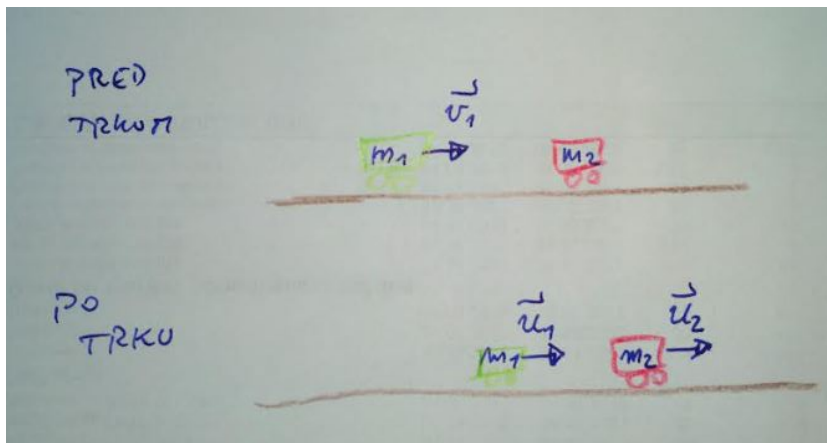
$$v = \frac{m_1 v_1}{3m_1 + m_4} = 1,11 \text{ m/s},$$

kar je odgovor za primer a).

Pri prožnih trkih je nekoliko več računanja. V tem primeru se poleg gibalne količine pri trku ohranja tudi skupna kinetična energija.

Označimo hitrosti po trku z u_1 in u_2 , kakor je narisano na sliki. Narisali smo (smer u_1) kakor, da se po trku prvi voziček giblje v isti smeri kakor pred trkom. To ni nujno res. Če se po trku odbije nazaj, bomo za rešitev dobili negativno vrednost za u_1 .

Poglejmo najprej kaj se zgodi pri trku prvega vozička (masa m_1 , hitrost v_1) z drugim (masa $m_2 = m_1$, hitrost 0).



Slika 10 Hitrosti vozičkov pred in po trku.

Ohranitev gibalne količine:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_1 u_2$$

in ohranitev kinetične energije

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_1 u_2^2}{2}.$$

Ker sta masi vozičkov enaki, se masa pokrajša. Iz prve enačbe izrazimo $u_1 = v_1 - u_2$ in vstavimo v drugo enačbo. Po kvadriranju se v_1^2 odšteje in dobimo $u_2 = v_1$. To pomeni, da se po prvem trku drugi voziček z maso m_1 giblje z enako hitrostjo kakor jo je imel prvi pred trkom. Prvi voziček se po trku z drugim ustavi. To sledi iz prve enačbe $u_1 = v_1 - u_2 = v_1 - v_1 = 0$.

Verjetno smo tak primer že prej izpeljali v šoli. V primeru prožnega trka prvega vzočka v mirujočega z enako maso, po trku drugi prevzame hitrost prvega, ki se po trku ustavi.

Očitno se enako zgodi pri drugem trku. Tukaj se splača narediti skico:

Po prvem trku torej prvi miruje, drugi se giblje z v_1 proti tretjemu.

Po drugem trku drugi obmiruje, tretji se giblje z v_1 proti četrtemu. Od tu naprej pa je nekoliko drugače, saj ima četrti drugačno maso od tretjega. Račun, ki smo ga prej naredili, ko smo lahko mase pokrajšali, ne opiše zadnjega trka.

Pred zadnjim trkom imamo torej tretji voziček z maso m_1 in hitrostjo v_1 , ki se zaleti v mirujočega z maso m_4 . Masi nista enaki, zato moramo ponoviti račun z ohranitvijo gibalne količine in kinetične energije.

Ohranitev gibalne količine (glede na sliko zdaj označujemo $m_2 = m_4$):

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_4 u_2$$

in ohranitev kinetične energije

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_4 u_2^2}{2}.$$

Hitrost vozička z maso m_4 po trku, ki smo jo označili z u_2 , je hitrost, ki jo iščemo.

Izrazimo hitrost u_1 iz prve enačbe $u_1 = v_1 - \frac{m_4}{m_1} u_2$. Da bo manj pisanja, označimo $\frac{m_4}{m_1} = \alpha = \frac{3}{2}$. Vstavimo u_1 v drugo enačbo, ki jo pred tem preuredimo:

$$v_1^2 = u_1^2 + \alpha u_2^2 = (v_1 - \alpha u_2)^2 + \alpha u_2^2.$$

Sledi:

$$u_2 = \frac{2 v_1}{1 + \alpha} = \frac{2 \cdot 5 \text{ m/s}}{1 + \frac{3}{2}} = 4 \text{ m/s}.$$